תרגיל 2 – תומר ניסים 313232845

# חלק תיאורטי

## פתרונות למשוואות הנורמליות

1. נוכיח ש-:
   1. – יהי . אם ה- היחיד ששייך לגרעין הוא וקטור האפס אז מההגדרה הוא גם שייך לגרעין של . עבור – מההגדרה של וקטור בגרעין נקבל ש- ולכן  
      ומכאן נקבל ש-.
   2. – יהי . אם ה- היחיד ששייך לגרעין הוא וקטור האפס אז מההגדרה הוא גם שייך לגרעין של . עבור – מההגדרה של וקטור בגרעין נקבל ש- ולכן  
       מכאן נקבל ש- ולכן .
2. נוכיח שעבור מטריצה ריבועית מתקיים .
   1. - יהי כלומר קיים כך ש-. יהי כלומר . נסתכל על המכפלה הפנימית:  
      1 – הגדרת המכפלה הפנימית. 2 – שחלוף על מספר איברים. 3 - .  
      לכן קיבלנו ש-.
   2. – נסתכל על . יהי לכן מתקיים  
      מכיוון שזה נכון לכל זה נכון גם עבור ולכן נקבל ש:  
      לכן קיבלנו ש-. מהוכחה שעשינו בלינארית 2, כאשר נסתכל על המשלים האורתוגונלי נקבל:  
      1 – עבור מ"ו המשלים האורתוגונלי של המשלים האורתוגונלי של הוא .  
      לכן סה"כ .
3. תהי מערכות משוואות לינאריות לא הומוגניות. נתון ש- ריבועית ולא הפיכה. נוכיח שלמערכת המשוואות יש אינסוף פתרונות אם ורק אם . שמועות שזה אמור להיות .  
   בלינארית 1 הראנו שמכיוון ש- היא מטריצה לא הפיכה, למערכת המשוואות ישנם אינסוף פתרונות או שאין פתרונות כלל. כמו כן, הראינו שישנם אינסוף פתרונות אם ורק אם . בסעיף א' הראנו כי ולכן ומכאן נסיק ש-, כלומר ישנם אינסוף פתרונות אם ורק אם . כעת הראנו בסעיף 2 ש- ובמקרה שלנו   
   לכן אם ורק אם . מכיוון שכל הגרירות הן דו-כיווניות נקבל שלמערכת המשוואות יש אינסוף פתרונות אם ורק אם .
4. תהי מערכת המשוואות הנורמלית . נראה שלמערכת יש פתרון יחיד כאשר הפיכה ושלמערכת יש אינסוף פתרונות כאשר לא הפיכה.
   1. הפיכה – מכיוון שהמטריצה הפיכה נוכל לפתור את המשוואה ולקבל פתרון יחיד:
   2. לא הפיכה – נשים לב ש- היא ריבועית ולא הפיכה ולכן נסתכל על ההוכחה מסעיף 3. אנחנו צריכים להראות ש- על מנת לקבל שיש אינסוף פתרונות למערכת. בסעיף 1 הוכחנו ש- ולכן ניקח ונסתכל על המכפלה הפנימית:  
      לכן מסעיף 3 למערכת יש אינסוף פתרונות.

## מטריצות הטלה

1. תהיי המטריצה כאשר הינם בסיס אורתונורמלי ל-.
   1. נראה ש- היא סימטרית:  
      מכיוון שמדובר על כפל סקלרים נקבל ש-  
      ולכן היא מטריצה סימטרית.
   2. ראו סעיף קודם - נוכיח אותו ונסתמך על ההוכחה שם על מנת להוכיח את .  
      נניח בשלילה שקיים ערך עצמי . יהי (המרחב העצמי של הערך העצמי ). נסתכל על השוויון שהוכחנו בסעיף ונכפול את כל אחד מהאגפים על :  
      מכיוון ש-נקבל ש- ולכן קיבלנו סתירה לסעיף . מכאן נסיק שהערכים העצמיים היחידים הינם . מכיוון שהוקטורים
   3. נראה ש-. ניתן לכתוב את כך - . מכיוון ש- מתאימים לערך העצמי 1 של נקבל:
   4. צריך להוכיח את זה איכשהו.
   5. נשתמש בסעיף ונקבל:

## הריבועים הפחותים

1. אני לא מבין עד הסוף מה הם רוצים.
2. נתון ש- הפיכה ונוכיח ש-. ראשית ניזכר כי הראינו ש-. כמו כן, נשים לב ש- לכן מכיוון שהמטריצה הפיכה אנו יודעים שהגרעין שלה טריוויאלי, כלומר . לכן נסיק ש- גם הוא ולכן .  
    נתון ש- נוכיח ש- הפיכה. מהנתון נסיק ש- לכן גם . מכיוון ש- אנחנו יודעים שהגרעין שלה חייב להיות טריוויאלי ולכן היא הפיכה.
3. נראה שעבור הנורמה *מסוג היא מינימלית, כלומר לכל פתרון אחר מתקיים .  
   יהי פתרון . מהגדרת המשוואות הנורמליות אנו יודעים שעבור הקואורדינטות אשר מתאימות לערכים הסינגולריים של מתקיים (כי לכל פתרון מתקיים וזה נותן לנו פתרון יחיד ל- הקואורדינטות הראשונות).  
   כעת לפי הגדרת , שאר הערכים על האלכסון של הם אפסים ולכן הקואדינטות הנוספות של הינן אפס. כעת נחשב את הנורמה של :  
   1 – כפי שהראינו בתחילת הסעיף, הקואורדינטות הראשונות זהות בין כל פתרון.*